O PROBLEMA DOS TRANSPORTES

O ALGORITMO DOS TRANSPORTES

- ## O Problema dos Transportes

O **Problema dos Transportes** é um problema *clássico* de Programação Linear:

> Tem-se **m** **'fontes de oferta'** de um dado produto, que é preciso abastecer a **n** **'pontos de procura'**.
>
> Conhecem-se os **custos unitários de transporte** c_{ij} associados ao transporte de uma unidade da **'fonte' i** **(i = 1 , 2 , ..., m)** para o **'ponto' j (j = 1 , 2 , ..., n)**. Conhecem-se as **disponibilidades** a_i associadas a cada **'fonte' i** e as **necessidades** b_j associadas a cada **'ponto' j**.
>
> Pretende-se **determinar o 'plano de transportes' que minimiza o custo total de transportes**.

Disponibilidades	Fontes de oferta		Pontos de Procura	Necessidades
a_1	1		1	b_1
a_2	2		2	b_2
a_i	i	c_{ij}	j	b_j
		$x_{ij} = ?$		
a_m	m		n	b_n

É óbvio que é importante saber qual a relação entre $\sum_{i=1}^{m} a_i$ e $\sum_{j=1}^{n} b_j$.

- **Se o total das disponibilidades for igual ao total das necessidades, diremos estar perante um 'problema equilibrado'** - apresentaremos o **'Algoritmo dos Transportes'** que permite resolver Problemas dos Transportes equilibrados.

• **Se os totais das disponibilidades e das necessidades diferirem, estaremos perante um 'problema desequilibrado'** - a sua resolução será possível, depois de *artificialmente* equilibramos o problema.

Consideremos um Problema dos Transportes equilibrado. A sua formulação é imediata:

> Seja x_{ij} a quantidade a transportar da 'fonte de oferta' **i** para o 'ponto de consumo' **j**.
>
> O problema pode apresentar-se do modo seguinte:
>
> $$\text{MIN} \quad C = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij}$$
>
> sujeito a:
>
> $$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = 1 , 2 , \ldots , m) \qquad [\,1\,]$$
>
> $$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1 , 2 , \ldots , n) \qquad [\,2\,]$$
>
> $$x_{ij} \geq 0 \qquad [\,3\,]$$

De notar que a função objectivo corresponderá ao Custo Total correspondente ao plano de transporte ' x_{ij} '.

As **m** restrições **[1]** dizem respeito a cada **'fonte de oferta'**. A i-ésima restrição diz respeito à i-ésima 'fonte de oferta' e visa assegurar que o total enviado para os n 'pontos de procura' é igual à capacidade dessa 'fonte de oferta'.

As **n** restrições **[2]** dizem respeito a cada **'ponto de procura'**. A j-ésima restrição diz respeito ao j-ésima 'ponto de procura' e visa assegurar que o total recebido das m 'fontes de oferta' é igual à necessidade desse 'ponto de procura'.

As **m . n** condições **[3]** são as habituais **condições de não negatividade das variáveis** (que não serão consideradas 'restrições').

☞ Se o problema for não equilibrado, que alterações terão que ser introduzidas ?

Representemos 'matricialmente' as restrições **[1]** e **[2]** do Problema dos Transportes:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccc|c}
x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{1n} & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2j} & \cdots & x_{2n} & \cdots & x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{ij} & \cdots & x_{in} & \cdots & x_{m1} & x_{m2} & & x_{mj} & \cdots & x_{mn} &
\end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccc|c}
1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & a_1 \\
 & & & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & & & & & & & & & & & & & & & a_2 \\
 & & & & & & & & & & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & & & & & & & & a_i \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & a_m \\
\hline
1 & & & & & & 1 & & & & & & \cdots & 1 & & & & & & \cdots & 1 & & & & & & b_1 \\
 & 1 & & & & & & 1 & & & & & \cdots & & 1 & & & & & \cdots & & 1 & & & & & b_2 \\
 & & & 1 & & & & & & 1 & & & \cdots & & & & 1 & & & \cdots & & & & 1 & & & b_j \\
 & & & & & 1 & & & & & & 1 & \cdots & & & & & & 1 & \cdots & & & & & & 1 & b_n
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Notas: 1) Os coeficientes não representados são nulos.
2) A coluna da direita representa os termos independentes das restrições.

Se observarmos com atenção a matriz dos coeficientes das restrições de um Problema dos Transportes constataremos que a estrutura deste problema é muito particular:

- os coeficientes ou são nulos ou unitários - os coeficientes unitários dispõem-se 'em patamares' ou 'em escada' (os 'patamares' correspondem às 'restrições da oferta' e as 'escadas' correspondem às 'restrições da procura').

- a cada variável só correspondem dois coeficientes unitários - genericamente, **à variável x_{ij} corresponderão coeficientes unitários na i-ésima 'restrição da oferta' e na j-ésima 'restrição da procura'** (todos os outros coeficientes, relativos a essa variável, serão nulos).

- um problema genérico dos transportes com m fontes de oferta e n pontos de procura, corresponderá a **m + n restrições**. No entanto, dado que se está a considerar que o problema é equilibrado, é possível estabelecer-se uma relação entre essas restrições (a soma dos termos independentes das 'restrições da oferta' deverá ser igual à soma dos termos independentes das 'restrições da procura'), pelo que, teremos apenas **m + n - 1 restrições independentes**.

A resolução de um Problema dos Transportes pode fazer-se por recurso ao Algoritmo Simplex, já que este é um problema de Programação Linear. No entanto, tal seria muito trabalhoso, já que, mesmo para um número baixo de fontes de oferta e pontos de procura, se teria um elevado número de restrições.

Atendendo à particularíssima estrutura do 'Problema dos Transportes' foi possível desenvolver um algoritmo eficiente para a resolução deste problema: **o Algoritmo dos Transportes**.

• O Algoritmo dos Transportes

Admitamos estar perante um Problema dos Transportes equilibrado com m 'fontes de oferta' e n 'pontos de procura'. Sistematizemos os **6** passos a seguir pelo Algoritmo dos Transportes para a sua resolução:

• **1** • Construir um '**Quadro dos Transportes**' com uma linha para cada 'fonte de oferta' e uma coluna para cada 'ponto de procura', isto é, **com m linhas e n colunas**, como se esquematiza em seguida:

	C1	**C2**	**...**	**Cj**	**...**	**Cn**	
F1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1j}	...	c_{1n}	a_1
F2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2j}	...	c_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...	...	...
Fi	c_{i1}	c_{i2}	...	c_{ij}	...	c_{in}	a_i
...	...	...	...	...	...	...	...
Fm	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mj}	...	c_{mn}	a_m
	b_1	b_2	...	b_j	...	b_n	

No canto inferior direito de cada 'célula' correspondente ao transporte a efectuar de uma fonte de oferta para um ponto de procura **indica-se o correspondente custo unitário de transporte**.

À direita de cada linha (correspondente a uma fonte de oferta) **indica-se a correspondente disponibilidade**.

Em baixo de cada coluna (correspondente a um ponto de procura) **indica-se a correspondente necessidade**.

• **2** • Arbitrar uma **solução inicial**. Para tal, poderemos recorrer ao **Método do Canto NW**, ou ao **Método do Custo Mínimo**.

• **3** • Verificar se a solução é **degenerada.**

• **4** • Verificar a optimalidade da solução em análise.

• **5** • Se a solução em análise não for óptima, determinar qual a variável não básica que deve entrar para a base e determinar o valor máximo que essa variável pode tomar.

• **6** • Proceder ao incremento da variável que vai entrar para a base e aos correspondentes ajustamentos no 'Quadro dos Transportes'. Voltar ao passo • **3** • .

Apliquemos o Algoritmo dos Transportes para resolver o Problema dos Transportes correspondente ao seguinte 'Quadro dos Transportes':

X	Y	Z

Nota: Custos

A	3	1	3	50	unitários de transporte em u.m. / unidade
B	2	9	3	250	
C	5	7	2	100	
	200	50	150		

• **1** •   Construir um '**Quadro dos Transportes**' ✓

• **2** •   Arbitrar uma **solução inicial**.

Comecemos por apresentar o **Método do Canto NW**:

a) seleccionar a 'célula' ainda não preenchida situada no 'Canto NW' (i.e.,⇖).

b) atribuir a essa célula o maior valor possível, respeitando simultâneamente a disponibilidade da 'fonte de oferta' e a necessidade do 'ponto de procura' correspondentes.

Repetir **a)** e **b)** até o 'Quadro dos Transportes' estar completamente preenchido.

	X	Y	Z	
A	3	1	3	**50**
B	2	9	3	250
C	5	7	2	100
	200	50	150	

Sombreou-se o 'Canto NW'. A 'fonte de oferta' A pode fornecer, no máximo, 50 unidades e o 'ponto de consumo' X necessita de 200 unidades de produto. Assim, o maior valor possível que se pode atribuir a $\mathbf{x_{AX}}$ será igual a **mín (50 ; 200)**, isto é, 50 unidades.

	X	Y	Z	
A	**50** / 3	**0** / 1	**0** / 3	50
B	2	9	3	250
C	5	7	2	100
	200	50	150	

De notar que quando se atribui a $\mathbf{x_{AX}}$ o valor 50, 'esgota-se' a capacidade de fornecimento da 'fonte de oferta' A, pelo que é imediata a atribuição do valor **0** a $\mathbf{x_{AY}}$ e $\mathbf{x_{AZ}}$.

Desde já se chama a atenção para o facto de, normalmente, se 'esgotar' apenas ou a disponibilidade da 'fonte de oferta', ou as necessidades do 'ponto de procura'. Só a título *excepcional* ocorrem simulataneamente essas duas situações. Quando tal ocorrer, originar-se-á uma situação de **degenerescência**.

Assinalemos o novo 'Canto NW' disponível:

	X	Y	Z	
A	50 [3]	0 [1]	0 [3]	50
B	[2]	[9]	[3]	**250**
C	[5]	[7]	[2]	100
	200	50	150	

A 'fonte de oferta' B pode fornecer, no máximo, 250 unidades e o 'ponto de consumo' X necessita agora de 150 unidades de produto (já que a 'fonte' A fornecerá 50 unidades). Assim, o maior valor possível que se pode atribuir a $\mathbf{x_{BX}}$ será igual a **mín (250 ; 150)**, isto é, 150 unidades.

	X	Y	Z	
A	50 [3]	0 [1]	0 [3]	50
B	**150** [2]	[9]	[3]	250
C	**0** [5]	[7]	[2]	100
	200	50	150	

De notar que quando se atribui a $\mathbf{x_{BX}}$ o valor 150, 'esgota-se' as necessidades do'ponto de consumo' X, pelo que é imediata a atribuição do valor **0** a $\mathbf{x_{CX}}$.

De notar ainda que nesta etapa do preenchimento do 'Quadro dos Transportes' apenas se 'esgotou a coluna X' ...

Assinalemos o novo 'Canto NW' disponível:

	X	Y	Z	
A	50 [3]	0 [1]	0 [3]	50
B	150 [2]	[9]	[3]	**250**
C	0 [5]	[7]	[2]	100
	200	**50**	150	

A 'fonte de oferta' B pode agora fornecer, no máximo, 100 unidades (já que já fornece 150 unidades a X) e o 'ponto de consumo' Y necessita de 50 unidades de produto. Assim, o maior valor possível que se pode atribuir a $\mathbf{x_{BY}}$ será igual a **mín (100 ; 50)**, isto é, 50 unidades.

	X	Y	Z	
A	50 $\boxed{3}$	0 $\boxed{1}$	0 $\boxed{3}$	50
B	150 $\boxed{2}$	**50** $\boxed{9}$	$\boxed{3}$	250
C	0 $\boxed{5}$	**0** $\boxed{7}$	$\boxed{2}$	100
	200	50	150	

De notar que quando se atribui a $\mathbf{x_{BY}}$ o valor 50, 'esgota-se' as necessidades do 'ponto de consumo' Y, pelo que é imediata a atribuição do valor **0** a $\mathbf{x_{CY}}$.

De notar ainda que nesta etapa do preenchimento do 'Quadro dos Transportes' apenas se 'esgotou a coluna Y' ...

Assinalemos o novo 'Canto NW' disponível:

	X	Y	Z	
A	50 $\boxed{3}$	0 $\boxed{1}$	0 $\boxed{3}$	50
B	150 $\boxed{2}$	50 $\boxed{9}$	$\boxed{3}$	**250**
C	0 $\boxed{5}$	0 $\boxed{7}$	$\boxed{2}$	100
	200	50	**150**	

A 'fonte de oferta' B pode agora fornecer, no máximo, 50 unidades (já que já fornece 150 unidades a X e 50 unidades a Y) e o 'ponto de consumo' Z necessita de 150 unidades de produto. Assim, o maior valor possível que se pode atribuir a $\mathbf{x_{BZ}}$ será igual a **mín (50 ; 150)**, isto é, 50 unidades.

	X	Y	Z	
A	50 $\boxed{3}$	0 $\boxed{1}$	0 $\boxed{3}$	50
B	150 $\boxed{2}$	50 $\boxed{9}$	**50** $\boxed{3}$	250
C	0 $\boxed{5}$	0 $\boxed{7}$	$\boxed{2}$	100
	200	50	150	

De notar que quando se atribui a $\mathbf{x_{BZ}}$ o valor 50, apenas se 'esgota' a disponibilidade da 'fonte de oferta' B ('esgota-se a linha B').

Resta finalmente a célula CZ, sendo de 100 unidades o correspondente valor, já que o 'ponto de consumo' Z necessita de um total de 150 unidades, recebendo já 50 unidades de B e, por outro lado, a 'fonte de oferta' C pode proporcionar um envio máximo de 100 unidades. Assim, o valor a atribuir a $\mathbf{x_{CZ}}$ será igual a **mín (100 ; 100)**, isto é, 100 unidades.

	X	Y	Z	
A	50 $\boxed{3}$	0 $\boxed{1}$	0 $\boxed{3}$	50
B	150 $\boxed{2}$	50 $\boxed{9}$	50 $\boxed{3}$	250
C	0 $\boxed{5}$	0 $\boxed{7}$	**100** $\boxed{2}$	100
	200	50	150	

De notar que, quando se completa o preenchimento do 'Quadro dos Transportes' se esgota **sempre** simultaneamente 'a linha' e 'a coluna' correspondentes à célula que então se preenche. Tal **não** indicia qualquer situação de degenerescência ...

Temos, agora, uma **solução inicial** para o nosso Problema de Transportes:

	X	Y	Z	
A	**50** $\boxed{3}$	**0** $\boxed{1}$	**0** $\boxed{3}$	50
B	**150** $\boxed{2}$	**50** $\boxed{9}$	**50** $\boxed{3}$	250
C	**0** $\boxed{5}$	**0** $\boxed{7}$	**100** $\boxed{2}$	100
	200	50	150	

Antes de prosseguirmos podemos 'traduzir' a **solução inicial** representada pelo 'Quadro dos Transportes' anterior:

$\mathbf{x_{AX} = 50\ ;\ x_{AY} = 0\ ;\ x_{AZ} = 0\ ;\ x_{BX} = 150\ ;\ x_{BY} = 50\ ;\ x_{BZ} = 50\ ;\ x_{CX} = 0\ ;\ x_{CY} = 0\ ;\ x_{CZ} = 100}$

Poderemos determinar facilmente o **custo associado a esta solução**:

$\mathbf{C_{Tot} = 50 . 3 + 0 . 1 + 0 . 3 + 150 . 2 + 50 . 9 + 50 . 3 + 0 . 5 + 0 . 7 + 100 . 2 = 1\ 250}$ **u.m.**

Claro que de imediato surge uma pergunta óbvia: ' **Será este o valor mínimo possível do Custo Total de Transporte ?** ' , ou, o que é o mesmo, ' **Será esta a solução óptima ?** ' .

Para respondermos a esta(s) pergunta(s) deveremos prosseguir a aplicação do Algoritmo dos Transportes:

• **3** • Verificar se a solução é **degenerada.**

Este é um cuidado que deveremos ter para evitar 'dissabores'...

Já se referiu que **a um Problema dos Transportes com m 'fontes de oferta' e n 'pontos de procura' estão associadas m + n - 1 restrições independentes**. Assim, **uma solução deste problema será básica não degenerada se tiver exactamente m + n - 1 variáveis básicas** (i.e., positivas). Se o número de variáveis positivas for inferior a m + n - 1, estaremos perante uma solução básica degenerada (e teremos que ter alguns cuidados antes de prosseguirmos...).

Assim, relativamente ao problema que estamos a resolver, tem-se:

nº variáveis básicas = m + n - 1 = 5 ✓

Ou seja, a solução inicial arbitrada é básica não degenerada.

• **4** • Verificar a optimalidade da solução em análise.

Quando apresentámos o Algoritmo Simplex para a resolução de problemas de Programação Linear, concluímos que para verificar a optimalidade de uma dada solução era necessário **re-escrever a função objectivo apenas em função das variáveis não básicas**. Neste problema pretendemos re-escrever a função C_{Tot} em função de x_{AY} , x_{AZ} , x_{CX} e x_{CY} , isto é,

$$C_{Tot} = 3 \cdot x_{AX} + 1 \cdot x_{AY} + 3 \cdot x_{AZ} + 2 \cdot x_{BX} + 9 \cdot x_{BY} + 3 \cdot x_{BZ} + 5 \cdot x_{CX} + 7 \cdot x_{CY} + 2 \cdot x_{CZ}$$

$$= 0 \cdot x_{AX} + ? \cdot x_{AY} + ? \cdot x_{AZ} + 0 \cdot x_{BX} + 0 \cdot x_{BY} + 0 \cdot x_{BZ} + ? \cdot x_{CX} + ? \cdot x_{CY} + 0 \cdot x_{CZ} + K$$

em que **K** corresponde ao custo da solução em análise.

Pretendemos, assim, passar da representação $C_{Tot} = \Sigma\, \Sigma\; c_{ij} \cdot x_{ij}$ para

$C_{Tot} = \Sigma\, \Sigma\; c'_{ij} \cdot x_{ij} + K$ com $c'_{ij} = 0$ **para todas as variáveis x_{ij} básicas** .

Para obtermos os novos valores dos custos unitários, c'_{ij} , poderemos adoptar o seguinte procedimento:

> Definir $c'_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ com $c'_{ij} = 0$ **para todas as variáveis x_{ij} básicas**, isto é, **para as m + n - 1 variáveis básicas será válida a igualdade** $c_{ij} = u_i + v_j$.
>
> Note-se que a cada linha do 'Quadro dos Transportes' se está a afectar um coeficiente u_i e a cada coluna um coeficiente v_j. Assim, teremos que determinar **m** valores para os m coeficientes u_i e **n** valores para os coeficientes v_j a partir das **m + n - 1** equações $c_{ij} = u_i + v_j$ correspondentes às variáveis básicas. Teremos, assim, um **sistema de m + n - 1 equações a m + n incógnitas**, que (como se sabe) nunca poderá ser possível e determinado.
>
> Arbitrando um valor de uma incógnita (de preferência, atribuir o valor zero a uma incógnita que intervenha em muitas equações), poderemos determinar os valores das restantes incógnitas.
>
> A partir dos valores dos coeficientes u_i e v_j determinados pela resolução do sistema referido, poderemos calcular os desejados novos valores dos custos c'_{ij} correspondentes às variáveis não básicas, o que nos permitirá saber se a solução em análise é, ou não, óptima.

De notar que os novos valores dos custos c'_{ij} correspondentes às variáveis não básicas não se alteram com uma eventual mudança do valor inicialmente arbitrado (ou da variável) - essa mudança poderá reflectir-se nos valores de u_i e v_j (mas não afecta c'_{ij}).

Retornemos ao exercício que apresentámos, para aplicar o procedimento descrito.

Escrevamos, **para as 5 variáveis básicas,** a correspondente igualdade $c_{ij} = u_i + v_j$:

$$
\begin{array}{lcl}
c_{AX} = u_A + v_X & \Leftrightarrow & u_A + v_X = 3 \\
c_{BX} = u_B + v_X & \Leftrightarrow & u_B + v_X = 2 \\
c_{BY} = u_A + v_X & \Leftrightarrow & u_B + v_Y = 9 \\
c_{BZ} = u_B + v_Z & \Leftrightarrow & u_B + v_Z = 3 \\
c_{CZ} = u_C + v_Z & \Leftrightarrow & u_C + v_Z = 2
\end{array}
$$

Dado que a variável u_B intervém em três das cinco equações, se arbitrarmos $u_B = 0$, resolvemos com facilidade o sistema de cinco equações, obtendo $u_A = 1$; $u_B = 0$; $u_C = -1$; $v_X = 2$; $v_Y = 9$ e $v_Z = 3$.

Poderemos, agora, determinar os novos valores de c'_{ij} correspondentes às **variáveis não básicas**:

$$
\begin{array}{lcl}
c'_{AY} = c_{AY} - u_A - v_Y & \Leftrightarrow & c'_{AY} = 1 - 1 - 9 = -9 \\
c'_{AZ} = c_{AZ} - u_A - v_Z & \Leftrightarrow & c'_{AZ} = 3 - 1 - 3 = -1 \\
c'_{CX} = c_{CX} - u_C - v_X & \Leftrightarrow & c'_{CX} = 5 + 1 - 2 = +4 \\
c'_{CY} = c_{CY} - u_C - v_Y & \Leftrightarrow & c'_{CY} = 7 + 1 - 9 = -1
\end{array}
$$

Poderemos, agora, re-escrever C_{Tot} :

$$C_{Tot} = 3 \,.\, x_{AX} + 1 \,.\, x_{AY} + 3 \,.\, x_{AZ} + 2 \,.\, x_{BX} + 9 \,.\, x_{BY} + 3 \,.\, x_{BZ} + 5 \,.\, x_{CX} + 7 \,.\, x_{CY} + 2 \,.\, x_{CZ}$$

$$= 0 \,.\, x_{AX} - 9 \,.\, x_{AY} - 1 \,.\, x_{AZ} + 0 \,.\, x_{BX} + 0 \,.\, x_{BY} + 0 \,.\, x_{BZ} + 4 \,.\, x_{CX} - 1 \,.\, x_{CY} + 0 \,.\, x_{CZ} + 1\,250$$

É fácil concluir que se se incrementar o valor de x_{AY}, x_{AZ} ou x_{CY} estaremos a diminuir o valor de C_{Tot}. Ora como pretendemos minimizar o valor de C_{Tot}, poderemos concluir que **a solução em análise não é óptima**.

♦ ♦ ♦

Façamos uma breve interrupção na resolução do problema apresentado, para fazermos alguns comentários.

Recordemos que os novos valores dos custos c'_{ij} correspondentes às variáveis não básicas não se alteram com uma eventual mudança do valor inicialmente arbitrado (ou da variável) - essa mudança poderá reflectir-se nos valores de u_i e v_j (mas não afecta c'_{ij}). Para que não restem dúvidas, sugere-se que trabalhe um pouquinho ...

☞ Arbitre inicialmente $u_A = 0$ e determine os restantes valores de u_i e v_j .

Determine agora os novos valores dos custos c'_{ij} correspondentes às variáveis não básicas e constate que coincidem com os valores obtidos quando inicialmente se tinha considerado $u_B = 0$.

A determinação dos valores de u_i e v_j não nos obriga a escrever *formalmente* o sistema de equações e a resolvê-lo. Com efeito, poderemos determinar esses valores directamente a partir do 'Quadro dos Transportes'.

Para tal, começamos por associar ao Quadro uma constante u_i por cada linha e uma constante v_j por cada coluna. Arbitramos o valor de uma das constantes (regra geral, atribuímos o valor 0 à constante associada à fila do Quadro com maior número de variáveis básicas). Finalmente, a partir das células correspondentes às **variáveis básicas**, determinamos os valores de u_i e v_j por resolução das correspondentes equações $c_{ij} = u_i + v_j$.

Comecemos por considerar o 'Quadro dos Transportes' correspondente à solução inicial obtida para o problema que estamos a tratar:

	X	Y	Z		
A	**50** / 3	0 / 1	0 / 3	50	$u_A =$
B	**150** / 2	**50** / 9	**50** / 3	250	$u_B =$
C	0 / 5	0 / 7	**100** / 2	100	$u_C =$
	200	50	150		
	$v_X =$	$v_Y =$	$v_Z =$		

Começamos por indicar as constantes u_i e v_j .

Inutilizámos' as células correspondentes às variáveis não básicas, que não serão utilizadas para a determinação dos valores de u_i e v_j .

	X	Y	Z		
A	**50** / 3	0 / 1	0 / 3	50	$u_A =$
B	**150** / 2	**50** / 9	**50** / 3	250	$\boxed{u_B = 0}$
C	0 / 5	0 / 7	**100** / 2	100	$u_C =$
	200	50	150		
	$v_X =$	$v_Y =$	$v_Z =$		

Fila com maior número de variáveis básicas: 2ª linha → arbitrar $u_B = 0$.

$c_{BX} = u_B + v_X \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2 = 0 + v_X \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow v_X = 2$

Analogamente se determina v_Y e v_Z a partir de x_{BY} e c_{BZ} , respectivamente.

	X	Y	Z		
A	**50** (3)	0 (1)	0 (3)	50	**u_A =**
B	**150** (2)	**50** (9)	**50** (3)	250	$\boxed{\mathbf{u_B = 0}}$
C	0 (5)	0 (7)	**100** (2)	100	**u_C =**
	200	50	150		
	$v_X = 2$	**$v_Y = 9$**	**$v_Z = 3$**		

A partir de **$v_X = 2$** e da var. básica x_{AX}, determina-se **u_A**.

$3 = u_A + 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u_A = 1$

	X	Y	Z		
A	**50** (3)	0 (1)	0 (3)	50	**$u_A = 1$**
B	**150** (2)	**50** (9)	**50** (3)	250	$\boxed{\mathbf{u_B = 0}}$
C	0 (5)	0 (7)	**100** (2)	100	**u_C =**
	200	50	150		
	$v_X = 2$	**$v_Y = 9$**	**$v_Z = 3$**		

A partir de **$v_Z = 3$** e da var. básica x_{CZ}, determina-se **u_C**.

$2 = u_C + 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u_C = -1$

	X	Y	Z		
A	**50** (3)	0 (1)	0 (3)	50	**$u_A = 1$**
B	**150** (2)	**50** (9)	**50** (3)	250	$\boxed{\mathbf{u_B = 0}}$
C	0 (5)	0 (7)	**100** (2)	100	**$u_C = -1$**
	200	50	150		
	$v_X = 2$	**$v_Y = 9$**	**$v_Z = 3$**		

E já está !

Sabemos que os valores de u_i e v_j foram determinados de modo a que, **para todas as variáveis básicas**, $\mathbf{c'_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j = 0}$. Interess-nos, agora, calcular os valores de $\mathbf{c'_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j}$ relativos às variáveis não básicas, o que poderemos fazer facilmente a partir do último 'Quadro dos Transportes' apresentado. Registaremos no canto inferior esquerdo de cada célula o correspondente valor de $\mathbf{c'_{ij}}$ (obviamente igual a 0, para as variáveis básicas).

	X	Y	Z		
A	50 **0** | 3	0 | 1	0 | 3	50	$u_A = 1$
B	150 **0** | 2	50 **0** | 9	50 **0** | 3	250	$\boxed{u_B = 0}$
C	0 | 5	0 | 7	100 **0** | 2	100	$u_C = -1$
	200 $v_X = 2$	50 $v_Y = 9$	150 $v_Z = 3$		

Começamos por registar os $c'_{ij} = 0$ relativos às var. básicas.

$c'_{AY} = c_{AY} - u_A - v_Y$
$c'_{AY} = 1 - 1 - 9 = -9$

$c'_{AZ} = c_{AZ} - u_A - v_Z$
$c'_{AZ} = 3 - 1 - 3 = -1$

$c'_{CX} = c_{CX} - u_C - v_X$
$c'_{CX} = 5 + 1 - 2 = +4$

$c'_{CY} = c_{CY} - u_C - v_Y$
$c'_{CY} = 7 + 1 - 9 = -1$

	X	Y	Z		
A	50 0 | 3	0 **-9** | 1	0 **-1** | 3	50	$u_A = 1$
B	150 0 | 2	50 0 | 9	50 0 | 3	250	$\boxed{u_B = 0}$
C	0 +4 | 5	0 **-1** | 7	100 0 | 2	100	$u_C = -1$
	200 $v_X = 2$	50 $v_Y = 9$	150 $v_Z = 3$		

E já está !

Destacamos os $c'_{ij} < 0$!

♦ ♦ ♦

Retornemos à resolução do problema apresentado:

Já tínhamos referido que **a existência de, pelo menos, um coeficiente c'_{ij} negativo indica que a solução em análise não é óptima** - estamos, obviamente, a considerar que a função objectivo se encontra expressa apenas em função das variáveis não básicas (pelo que para as variáveis básicas será válida a igualdade $c'_{ij} = 0$) . Assim, reafirmamos que a solução em análise não é a solução óptima do problema.

• **5** • À semelhança do procedimento seguido no Algoritmo Simplex Primal, **seleccionaremos para entrar na base a variável correspondente ao coeficiente c'_{ij} mais negativo**. De notar que c'_{ij} indica o acréscimo (decréscimo se for negativo) da função objectivo correspondente a um incremento unitário da correspondente variável.

Assim, seleccionamos x_{AY} para entrar na base, isto é, para ser incrementada.

E **qual o incremento máximo, θ, que pode ser dado à variável x_{AY} ?**

Para determinarmos esse valor, incrementaremos, no 'Quadro dos Transportes' a célula correspondente a x_{AY} de θ :

	X	Y	Z		
A	50 0 3	0 **+** θ **-9** 1	0 -1 3	**50**	$u_A = 1$
B	150 0 2	50 0 9	50 0 3	250	$\boxed{u_B = 0}$
C	0 +4 5	0 -1 7	100 0 2	100	$u_C = -1$
	200	**50**	150		
	$v_X = 2$	$v_Y = 9$	$v_Z = 3$		

Para se respeitar as capacidades de oferta das várias fontes de oferta e as necessidades dos vários pontos de procura, deveremos **'re-equilibrar' o Quadro, somando e subtraindo θ, nas células correspondentes às variáveis básicas necessárias ao re--equilíbrio**. Só assim se garante que apenas a variável seleccionada entre na base, com a correspondente saída de uma variável que, até aí, se encontrava na base:

	X	Y	Z		
A	50 **-** θ 0 3	0 **+** θ **-9** 1	0 -1 3	**50**	$u_A = 1$
B	150**+** θ 0 2	50 **-** θ 0 9	50 0 3	250	$\boxed{u_B = 0}$
C	0 +4 5	0 -1 7	100 0 2	100	$u_C = -1$
	200	**50**	150		
	$v_X = 2$	$v_Y = 9$	$v_Z = 3$		

Qualquer valor positivo de θ pode ser atribuído, sem qualquer perturbação das variáveis x_{AY} e x_{BX}. No entanto, é preciso termos cuidado com as variáveis x_{AX} e x_{BY} já que estamos a subtriar θ ao seu actual valor e essas variáveis (como todas as demais) não podem ser negativas !

Assim, $50 - \theta \geq 0 \Leftrightarrow \theta \leq \mathbf{50} \Rightarrow \theta_{\text{máx}} = \mathbf{50}$.

• **6** • Poderemos agora iniciar a **2ª iteração**, escrevendo o 'Quadro dos Transportes' correspondente à nova solução em análise:

	X	Y	Z		
A	50 - θ 0 … 3	0 + θ **-9** … 1	0 -1 … 3	**50**	**$u_A = 1$**
B	150+ θ 0 … 2	50 - θ 0 … 9	50 0 … 3	250	$\boxed{\mathbf{u_B = 0}}$
C	0 +4 … 5	0 -1 … 7	100 0 … 2	100	**$u_C = - 1$**
	200	**50**	150		
	v_X= 2	**v_Y= 9**	**v_Z= 3**		

θ = **50** ⇩

	X	Y	Z	
A	**<u>0</u>** 3	**50** 1	0 3	50
B	**200** 2	**<u>0</u>** 9	50 3	250
C	0 5	0 7	100 2	100
	200	50	150	

Antes de prosseguirmos, verifiquemos que **a diferença entre os custos da solução anterior e da nova solução é igual a θ . c'$_{AY}$ = 50 . (- 9) = - 450 u.m.**.

Custo da solução anterior = 1 250 u.m.
Custo da nova solução = 50 . 1 + 200 . 2 + 50 . 3 + 100 . 2 = 800 u.m.
ΔC = - 450 u.m. ✓

Prossigamos com o passo

• **3** • Verificar se a solução em análise é, ou não, degenerada:

m + n - 1 = 5 ≠ nº variáveis positivas = 4 ! ⇒ **Base degenerada** !

A solução em análise é básica degenerada, já que o número de variáveis estritamente positivas é inferior a m + n -1 . Na realidade, e dado que o número de variáveis positivas é inferior em 1 unidade relativamente a m + n - 1 , bastaria que uma das variáveis que tem o valor zero tivesse um valor positivo para que a solução deixasse de ser degenerada ....

Observando o modo como se obteve o actual 'Quadro dos Transportes', podemos constatar que, quando $\mathbf{x_{AY}}$ entrou na base (tomando o valor 50), alterámos os valores de $\mathbf{x_{AX}}$, $\mathbf{x_{BX}}$ e $\mathbf{x_{BY}}$. O 'problema' ocorreu quando simultaneamente as variáveis $\mathbf{x_{AX}}$ e $\mathbf{x_{BY}}$ deixaram a base (passando a valer zero). Normalmente, apenas uma variável deixa a base, cedendo o seu lugar à nova variável que entra na base.

Quando mais do que uma variável deixa a base, é conveniente assinalar (por exemplo, sublinhando) essas variáveis, para posteriormente se escolher a(s) variável(eis) a 'promover' artificialmente para a base.

Neste caso, sublinhamos os zeros correspondentes às variáveis $\mathbf{x_{AX}}$ e $\mathbf{x_{BY}}$. Interessa-nos considerar que uma dessas variáveis ainda está na base (embora com um valor infinitesimal, que designaremos por **0***).

Como regra geral, e uma vez que se pretende minimizar a função objectivo, escolheremos para integrar artificialmente na base a variável de menor custo, de entre as candidatas (assinaladas / sublinhadas). Neste caso, escolheríamos $\mathbf{x_{AX}}$ para integrar a base, ou seja:

	X	Y	Z	
A	**0*** [3]	**50** [1]	0 [3]	50
B	**200** [2]	**0** [9]	50 [3]	250
C	0 [5]	0 [7]	100 [2]	100
	200	50	150	

E agora, poderemos prosseguir, considerando $\mathbf{x_{AX}}$ uma variável básica, para efeitos de determinação dos valores de u_i , v_j e c'_{ij} . Esclareçamos, então, se a nova solução é,ou não, óptima:

• **4** • Determinar u_i , v_j de modo a que $c'_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j = 0$ para as variáveis básicas.

	X	Y	Z			
A	**0*** [3]	**50** [1]	0 [3]	50	$u_A = 3$	II
B	**200** [2]	**0** [9]	50 [3]	250	$u_B = 2$	III
C	0 [5]	0 [7]	100 [2]	100	$u_C = 1$	VI
	200	50	150			
	$\boxed{v_X = 0}$	$v_Y = -2$	$v_Z = 1$			
	I	IV	V			

Nota: Indicou-se a sequência seguida para a determinação dos valores utilizando a numeração romana.

Poderemos, agora, calcular os novos custos $c'_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ associados às variáveis não básicas:

$c'_{AZ} = c_{AZ} - u_A - v_Z = 3 - 3 - 1 = -1$
$c'_{BY} = c_{BY} - u_B - v_Y = 9 - 2 + 2 = +9$
$c'_{CX} = c_{CX} - u_C - v_X = 5 - 1 - 0 = +4$
$c'_{CY} = c_{CY} - u_C - v_Y = 7 - 1 + 2 = +8$

	X	Y	Z		
A	0* 0 3	50 0 1	0 **-1** 3	50	u_A **= 3**
B	200 0 2	0 9 9	50 0 3	250	u_B **= 2**
C	0 4 5	0 8 7	100 0 2	100	u_C **= 1**
	200	50	150		
	$\boxed{v_X = 0}$	v_Y **= -2**	v_Z **= 1**		

Conclusão: A solução em análise ainda não é óptima.

• **5** • Dado que o único valor negativo de c'_{ij} corresponde a x_{AZ}, dever-se-á incrementar essa variável.

	X	Y	Z		
A	$0^* - \theta$ 0 3	50 0 1	$0 + \theta$ **-1** 3	50	u_A **= 3**
B	$200 + \theta$ 0 2	0 9 9	$50 - \theta$ 0 3	250	u_B **= 2**
C	0 4 5	0 8 7	100 0 2	100	u_C **= 1**
	200	50	150		
	$\boxed{v_X = 0}$	v_Y **= -2**	v_Z **= 1**		

Determinemos $\theta_{máx}$: $\mathbf{0^*} - \theta \geq \mathbf{0} \quad \wedge \quad \mathbf{50} - \theta \geq \mathbf{0} \Leftrightarrow \theta \leq \mathbf{0^*}$, ou seja, $\theta_{máx} = \mathbf{0^*}$.

• **6** • Actualizemos o 'Quadro dos Transportes':

	X	Y	Z	
A	$0^* - \theta$ 0 3	50 0 1	$0 + \theta$ **-1** 3	50
B	$200 + \theta$ 0 2	0 9 9	$50 - \theta$ 0 3	250
C	0 4 5	0 8 7	100 0 2	100
	200	50	150	

$\theta = \mathbf{0^*} \Downarrow$

$\theta = \mathbf{0^*}$ ⇩ (column Y)

	X	Y	Z		
A	0 (3)	50 (1)	**0*** (3)	50	$u_A =$
B	200 (2)	0 (9)	50 (3)	250	$u_B =$
C	0 (5)	0 (7)	100 (2)	100	$u_C =$
	200	50	150		
	$v_X =$	$v_Y =$	$v_Z =$		

• **3** • De notar que a 'nova' solução continua a ser degenerada. (Na realidade, e em termos práticos, ela coincide com a anterior ... Apenas se alterou a variável nula que é promovida a *básica* ...).

Dispomos, no entanto, de cinco *variáveis básicas* a partir das quais determinaremos os valores dos coeficientes u_i e v_j.

• **4** • Determinemos os valores dos coeficientes u_i e v_j, com vista a apurarmos se a solução em análise é, ou não, óptima.

	X	Y	Z			
A	0 (3)	50 (1)	**0*** (3)	50	$u_A = 3$	II
B	200 (2)	0 (9)	50 (3)	250	$u_B = 3$	III
C	0 (5)	0 (7)	100 (2)	100	$u_C = 2$	IV
	200	50	150			
	$v_X = -1$	$v_Y = -2$	$\boxed{v_Z = 0}$			
	VI	V	I			

Nota: Indicou-se a sequência seguida para a determinação dos valores utilizando a numeração romana.

Poderemos, agora, calcular os novos custos $c'_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ associados às variáveis não básicas:

$c'_{AX} = c_{AX} - u_A - v_X = 3 - 3 + 1 = + 1$
$c'_{BY} = c_{BY} - u_B - v_Y = 9 - 3 + 2 = + 8$
$c'_{CX} = c_{CX} - u_C - v_X = 5 - 2 + 1 = + 4$
$c'_{CY} = c_{CY} - u_C - v_Y = 7 - 2 + 2 = + 7$

Dado que os novos custos c'_{ij} associados às variáveis não básicas são positivos, estamos perante a **solução óptima** do problema:

$\mathbf{x^*_{AX} = 0}$; $\mathbf{x^*_{AY} = 50}$; $\mathbf{x^*_{AZ} = 0}$;
$\mathbf{x^*_{BX} = 200}$; $\mathbf{x^*_{BY} = 0}$; $\mathbf{x^*_{BZ} = 50}$;
$\mathbf{x^*_{CX} = 0}$; $\mathbf{x^*_{CY} = 0}$; $\mathbf{x^*_{CZ} = 100}$.

O **custo associado a esta solução** não difere do custo da solução anterior, já que as variáveis estritamente positivas são as mesmas e com os mesmos valores nas duas soluções. Assim, $\mathbf{C^*_{Tot} = 800}$ **u.m.** .

Como já se referiu, as duas últimas soluções, em termos práticos, coincidem. No entanto, sob o ponto de vista formal, as bases correspondentes são diferentes (num dos casos $\mathbf{x_{AX}}$ está na base; no outro é $\mathbf{x_{AZ}}$ que está na base)...

• • • • •

Retomemos o início da resolução do exercício apresentado, para utilizarmos, como alternativa ao Método do Canto NW o **Método do Custo Mínimo** para determinação de uma solução inicial.

• **2** • Arbitrar uma **solução inicial**.

Comecemos por apresentar o **Método do Custo Mínimo**:

a) seleccionar a 'célula' ainda não preenchida correspondente ao menor valor de custo unitário de transporte;

b) atribuir a essa célula o maior valor possível, respeitando simultâneamente a disponibilidade da 'fonte de oferta' e a necessidade do 'ponto de procura' correspondentes.

Repetir **a)** e **b)** até o 'Quadro dos Transportes' estar completamente preenchido.

Exemplifiquemos a sua aplicação com o problema apresentado:

	X	Y	Z	
A	[3]	[1]	[3]	**50**
B	[2]	[9]	[3]	250
C	[5]	[7]	[2]	100
	200	**50**	150	

Sombreou-se a 'célula' correspondente ao menor valor de custo unitário de transporte. A 'fonte de oferta' A pode fornecer, no máximo, 50 unidades e o 'ponto de consumo' Y necessita de 50 unidades de produto. Assim, o maior valor possível que se pode atribuir a $\mathbf{x_{AY}}$ será igual a **mín (50 ; 50)**, isto é, 50 unidades.

	X	Y	Z	
A	**0** [3]	**50** [1]	**0** [3]	50
B	[2]	**0** [9]	[3]	250
C	[5]	**0** [7]	[2]	100
	200	50	150	

De notar que quando se atribui a $\mathbf{x_{AY}}$ o valor 50, 'esgota-se' simultaneamente a 'linha A' e a 'coluna Y', o que irá originar uma situação de degenerescência. Por esse motivo, assinalamos os zeros registados no quadro, sublinhando-os.

Assinalemos a nova 'célula' (ainda não preenchida) correspondente ao menor valor de custo unitário de transporte:

	X	Y	Z	
A	$\underline{0}$ [3]	50 [1]	$\underline{0}$ [3]	50
B	[2]	$\underline{0}$ [9]	[3]	**250**
C	[5]	$\underline{0}$ [7]	[2]	100
	200	50	150	

De notar que poderíamos ter optado pela variável $\mathbf{x_{CZ}}$ a que corresponde o mesmo custo unitário de transporte.

A 'fonte de oferta' B pode fornecer, no máximo, 250 unidades e o 'ponto de consumo' X necessita de 200 unidades de produto. Assim, o maior valor possível que se pode atribuir a $\mathbf{x_{BX}}$ será igual a **mín (250 ; 200)**, isto é, 200 unidades.

	X	Y	Z	
A	$\underline{0}$ [3]	50 [1]	$\underline{0}$ [3]	50
B	**200** [2]	$\underline{0}$ [9]	[3]	250
C	**0** [5]	$\underline{0}$ [7]	[2]	100
	200	50	150	

Esgotou-se a 'coluna X'.

Assinalemos a nova 'célula' (ainda não preenchida) correspondente ao menor valor de custo unitário de transporte:

	X	Y	Z	
A	$\underline{0}$ [3]	50 [1]	$\underline{0}$ [3]	50
B	200 [2]	$\underline{0}$ [9]	[3]	250
C	0 [5]	$\underline{0}$ [7]	[2]	**100**
	200	50	**150**	

A 'fonte de oferta' C pode fornecer, no máximo, 100 unidades (na realidade, terá que fornecer obrigatoriamente essas 100 unidades a Z, já que não efectuou qualquer fornecimento a X e a Y ...) e o 'ponto de consumo' Z necessita de 150 unidades de produto. Assim, o maior valor possível que se pode atribuir a $\mathbf{x_{CZ}}$ será igual a **mín (100 ; 150)**, isto é, 100 unidades.

	X	Y	Z	
A	$\underline{0}$ $\boxed{3}$	50 $\boxed{1}$	$\underline{0}$ $\boxed{3}$	50
B	200 $\boxed{2}$	$\underline{0}$ $\boxed{9}$	$\boxed{3}$	250
C	0 $\boxed{5}$	$\underline{0}$ $\boxed{7}$	100 $\boxed{2}$	100
	200	50	150	

Esgotou-se a 'linha C'.

Finalmente, resta-nos preencher a célula relativa à variável $\mathbf{x_{BZ}}$. É imediata a atribuição de 50 unidades a essa variável, esgotando-se simultaneamente as correspondentes linha e coluna (como sempre acontece com o preenchimento da 'última' célula).

	X	Y	Z	
A	$\underline{\mathbf{0}}$ $\boxed{3}$	**50** $\boxed{1}$	$\underline{\mathbf{0}}$ $\boxed{3}$	50
B	**200** $\boxed{2}$	$\underline{\mathbf{0}}$ $\boxed{9}$	**50** $\boxed{3}$	250
C	**0** $\boxed{5}$	$\underline{\mathbf{0}}$ $\boxed{7}$	**100** $\boxed{2}$	100
	200	50	150	

E pronto ! Eis a solução inicial obtida a partir do **Método do Custo Mínimo**.

De notar que o **custo total de transporte** correspondente é igual a 800 u.m. - valor inferior ao do custo da solução inicial obtida a partir do Método do Canto NW ... e, por acaso, até já sabemos que este é o valor mínimo correspondente a este problema ...

Usualmente, a solução inicial obtida a partir do Método do Custo Mínimo apresenta um custo total de transporte inferior ao valor correspondente da solução inicial obtida a partir do Método do Canto NW. Assim, em geral, o processo iterativo descrito é mais 'rápido' quando se adopta a solução inicial obtida a partir do **Método do Custo Mínimo**.

Se pretendessemos prosseguir a aplicação do Algoritmo dos Transportes ao problema apresentado a partir da solução inicial obtida com o Método do Custo Mínimo, passaríamos ao passo

- **3** • Verificar se a solução é, ou não, degenerada:

nº variáveis positivas = 4 $\neq$ m + n - 1 = 5 $\Rightarrow$ Solução degenerada.

Como se referiu anteriormente, ao esgotarmos simulataneamente a 'linha A' e a 'coluna Y' quando se fez a primeira atribuição de um valor a uma célula originamos a situação de degenerescência.

Para podermos prosseguir a aplicação do Algoritmo dos Transportes, é necessário 'promover' uma das variáveis nulas para a base. Escolheremos, de entre as variáveis com valor 0 resultante do 'esgotamento' simultâneo da 'linha A' e 'coluna Y' (0 no quadro), a variável com custo unitário de transporte mais baixo.

Assim, poderíamos optar por seleccionar $\mathbf{x_{AX}}$ ou $\mathbf{x_{AZ}}$. Como por acaso, já resolvemos o problema ... até sabemos que se $\mathbf{x_{AZ}}$ pertencer à base (com o valor 0*) se está perante a solução óptima ...

• • • • •

Recordemos que as **situações de degenerescência** podem ocorrer quando:

i) ao determinar uma solução inicial e ao atribuir um valor a uma variável se 'esgota' simultaneamente quer a correspondente linha, quer a correspondente coluna.

ii) se actualiza um 'Quadro dos Transportes' e se verifica que mais de uma variável básica (a que se subtrái θ) deixa a base.

Para podermos prosseguir com a aplicação do Algoritmo dos Transportes, deveremos 'promover' uma (ou, se necessário, mais) variável nula para a base - escolhemos uma variável nula, de entre as que tenham resultado da situação i) ou ii), com o menor custo unitário de transporte e atribuimos-lhe o valor 0*, considerando-a, então, como variável básica.

• • • • •

Um reparo deve ser feito relativamente ao reequilíbrio dos 'Quadros dos Transportes': à excepção da variável não básica que vai entrar na base, todas as outras variáveis intervenientes nas 'operações de re-equilíbrio' deverão ser variáveis básicas. Por vezes, não conseguimos re-equilibrar um 'Quadro dos Transportes' apenas com quatro variáveis - veja-se o exemplo seguinte:

	X	Y	Z	W	
A	0 ...	0 ...	150 ...	50 ...	200
B	100 ...	50 ...	50 ...	0 ...	200
C	0 ...	$0 + \theta$ ...	0 ...	100 ...	100
	100	50	200	150	

Imagine que se pretendia incrementar a variável $\mathbf{x_{CY}}$, fazendo-a entrar para a base.

Para re-equilibrar a 'coluna Y' só poderíamos subtrair θ a $\mathbf{x_{BY}}$; por outro lado, para re-equilibrar a 'linha C' só poderíamos subtrair θ a $\mathbf{x_{CW}}$.

	X	Y	Z	W	
A	0 ...	0 ...	150 ...	50 ...	200
B	100 ...	$50 - \theta$ ...	50 ...	0 ...	200
C	0 ...	$0 + \theta$ ...	0 ...	$100 - \theta$ ...	100
	100	50	200	150	

Torna-se, agora, necessário, re-equilibrar a 'linha B' e a 'coluna W'. Relativamente à 'coluna W' só poderemos somar θ a $\mathbf{x_{AW}}$ e, ver-nos-emos obrigados a subtrair θ a $\mathbf{x_{AZ}}$. Assim, o re-equilíbrio da 'linha B' deve ser feito somando θ a $\mathbf{x_{BZ}}$ o que termina o processo de re-equilíbrio ...

	X	Y	Z	W	
A	0 ...	0 ...	$150 - \theta$ ...	$50 + \theta$ ...	200
B	100 ...	$50 - \theta$ ...	$50 + \theta$ ...	0 ...	200
C	0 ...	$0 + \theta$ ...	0 ...	$100 - \theta$ ...	100
	100	50	200	150	

Já agora ... Aproveitemos para determinar o maior valor possível do incremento θ correspondente ao Quadro anterior:

$$\mathbf{150} - \theta \geq \mathbf{0} \ \wedge\ \mathbf{50} - \theta \geq \mathbf{0} \ \wedge\ \mathbf{100} - \theta \geq \mathbf{0} \ \Leftrightarrow\ \theta \leq \mathbf{50} \ \Leftrightarrow\ \theta_{\mathbf{máx}} = \mathbf{50}$$

• • • • •

- Problemas dos Transportes Desequilibrados

Recordemos a formulação do 'Problema dos Transportes':

Seja $\mathbf{x_{ij}}$ a quantidade a transportar da 'fonte de oferta' **i** para o 'ponto de consumo' **j**.

O problema pode apresentar-se do modo seguinte:

$$\mathbf{MIN} \quad \mathbf{C} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{c_{ij} \cdot x_{ij}}$$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = 1 , 2 , \ldots , m) \qquad [1]$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1 , 2 , \ldots , n) \qquad [2]$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad [3]$$

O somatório $\sum_{i=1}^{m} a_i$ designa **o total das disponibilidades** das 'fontes de oferta'.

O somatório $\sum_{j=1}^{n} b_j$ designa **o total das necessidades** dos 'pontos de consumo'.

• Se o total das disponibilidades (que designaremos, *abreviadamente*, por $\Sigma\ a_i$) for inferior ao total das necessidades (que designaremos, *abreviadamente*, por $\Sigma\ b_j$), teremos uma situação de **procura superior à oferta**, pelo que, para podermos recorrer ao Algoritmo dos Transportes, deveremos tornar o problema *equilibrado*, o que se consegue com a **criação de uma 'fonte de oferta' fictícia com capacidade de oferta igual a ($\Sigma\ b_j - \Sigma\ a_i$) .**

No que respeita ao 'Quadro dos Transportes', esta 'fonte de oferta' fictícia, corresponde a uma nova linha. Os valores das variáveis dessa linha corresponderão às **necessidades não satisfeitas**, relativamente aos diversos 'pontos de procura'. Assim, em termos práticos, esses valores representam quantidades desejadas mas não satisfeitas, pelo que não há um transporte efectivo que lhes seja associado. Assim, os correspondentes 'custos unitários de transporte' poderão, por este ponto de vista, ser nulos.

Se existirem multas previstas pelo não fornecimento a algum(ns) 'ponto(s) de procura', fará sentido que os valores unitários de multa possam ser utilizados como 'custos unitários de transporte'.

Se se pretender garantir que o fornecimento de um dado 'ponto de consumo' é feito integralmente, então haverá que garantir que a 'fonte fictícia' *abasteça* 0 unidades a esse 'ponto de consumo'. Tal pode conseguir-se facilmente considerando um 'valor muito elevado' para o correspondente custo unitário de transporte.

Imagine-se, por exemplo, o problema de fornecimento de oxigénio por parte de duas fábricas (A e B com capacidade de produção de 350 e 200 un. vol. / mês, respectivamente) a três consumidores (Hospital, X e Y com necessidades mensais de, respectivamente, 300, 250 e 150 un. vol.). Sabe-se que o total da procura excede a disponibilidade total e pretende-se garantir o abastecimento integral do Hospital. Admitamos que o problema é representado pelo seguinte 'Quadro dos Transportes' (custos em u.m. / un. vol.) :

	Hospital	X	Y	
A	16	16	8	350
B	14	14	12	200
	300	250	150	

⇩

	Hospital	X	Y	
A	16	16	8	350
B	14	14	12	200
Fict.	∞	0	0	**150**
	300	250	150	

Nota: Em termos práticos, relativamente à célula 'Fict. / Hospital' bastaria considerar um custo unitário de transporte muito mais alto do que os restantes, por exemplo, 1 000 u.m. / un. vol. .

☞ E agora é só resolver o problema ... Aproveite, para testar as suas capacidades ...

• Se o total das disponibilidades (Σ a_i) for superior ao total das necessidades (Σ b_j), teremos uma situação de **oferta superior à procura**, pelo que, para podermos recorrer ao Algoritmo dos Transportes, deveremos tornar o problema *equilibrado*, o que se consegue com a **criação de um 'ponto de consumo' fictício com necessidade igual a (Σ a_i - Σ b_j) .**

No que respeita ao 'Quadro dos Transportes', este 'ponto de consumo' fictício, corresponde a uma nova coluna. Os valores das variáveis dessa coluna corresponderão às **produções não escoadas**, relativamente às diversas 'fontes de oferta'. Assim, em termos páticos, esses valores representam quantidades produzidas mas não fornecidas, pelo que não há um transporte efectivo que lhes seja associado. Assim, os correspondentes 'custos unitários de transporte' poderão, por este ponto de vista, ser nulos.

Se se pretender garantir que a produção de uma dada 'fonte de oferta' seja integralmente escoada, então haverá que garantir que essa 'fonte de oferta' *abasteça* 0 unidades ao 'ponto de consumo' fictício. Tal pode conseguir-se facilmente considerando um 'valor <u>muito elevado</u>' para o correspondente custo unitário de transporte.

Imagine-se, por exemplo, que dois silos para armazenamento de cereais (A e B, com capacidade de fornecimento de 350 e 200 toneladas por mês, respectivamente) são utilizados para o abastecimento de dois consumidores (X e Y com necessidades mensais de, respectivamente, 300 e 150 toneladas). Pretende-se garantir que o abastecimenteo seja feito de tal modo que o silo B esteja vazio no final do mês para permitir uma 'inspecção técnica'. Admitamos que o problema é representado pelo seguinte 'Quadro dos Transportes' (custos em u.m. / ton.) :

	X	Y	
A	16	8	350
B	14	12	200
	300	150	

⇩

	X	Y	**Fict.**	
A	16	8	0	350
B	14	12	∞	200
	300	150	**100**	

diferirem, estaremos perante um 'problema desequilibrado' - a sua resolução será possível, depois de *artificialmente* equilibramos o problema.

☞ E agora é só resolver o problema ... Aproveite, para testar as suas capacidades ...

• • • • •

- O Problema da Afectação

Um caso particular do 'Problema dos Transportes' ocorre quando as variáveis só podem tomar o valor 1, ou 0 e quando os termos independentes das restrições são todos iguais a 1.

Este é o conhecido '**Problema da Afectação**': pretende-se determinar qual o melhor plano de afectação, por exemplo, de trabalhadores a máquinas, de modo a minimizar o custo total de formação dos trabalhadores.

A variável x_{ij} toma o valor 1 quando o trabalhador **i** é afectado à máquina **j**, ou 0, caso contrário. O custo c_{ij} pode ser encarado como o custo de formação do trabalhador **i** para este poder operar com a máquina **j**.

O problema pode apresentar-se do modo seguinte:

$$\text{MIN} \quad C = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij}$$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \qquad [1]$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \qquad [2]$$

$$x_{ij} \in \{0 ; 1\} \qquad [3]$$

Quando **m = n**, há tantas máquinas, quantos os trabalhadores e o problema é 'equilibrado'. Caso contrário, estaremos perante um 'problema desequilibrado' (que se poderá 'equilibrar' com a introdução de trabalhador(es) fictício(s) ou máquina(s) fictícia(s).

O 'Problema da Afectação', como caso particular do 'Problema dos Transportes' pode ser resolvido por utilização do Algoritmo dos Transportes. Neste caso, estaremos sempre perante 'soluções degeneradas ! [Porque será que tal ocorre ? ...].

A estrutura do 'Problema da Afectação' é ainda mais particular do que a do 'Problema dos Transportes', pelo que existe um algoritmo especialmente concebido para a sua resolução - o **Algoritmo Húngaro** (que não abordaremos).

C O N C L U S Ã O

A Programação Linear tem um papel fulcral no âmbito da Programação Matemática e, de um modo mais geral, uma grande importância na Investigação Operacional, pelo que justifica que a nossa abordagem a este tema tenha sido relativamente extensa e incluído vários tópicos.

O conjunto de tópicos apresentado constitui uma perspectiva *equilibrada* da Programação Linear. Tentou-se que essa perspectiva apresentasse uma *sequência* que facilitasse a progressão de quem pela primeira vez contacta com a Programação Linear.

Dado que do programa desta disciplina fazem parte outros domínios da Investigação Operacional, a abordagem da Programação Linear levada a cabo, não incluíu tópicos como a Técnica da Base Artificial, o Algoritmo Simplex Dual, a Programação Linear Paramétrica, o Problema da Afectação. Estes tópicos poderão ser abordados pelos leitores mais interessados na Programação Matemática.